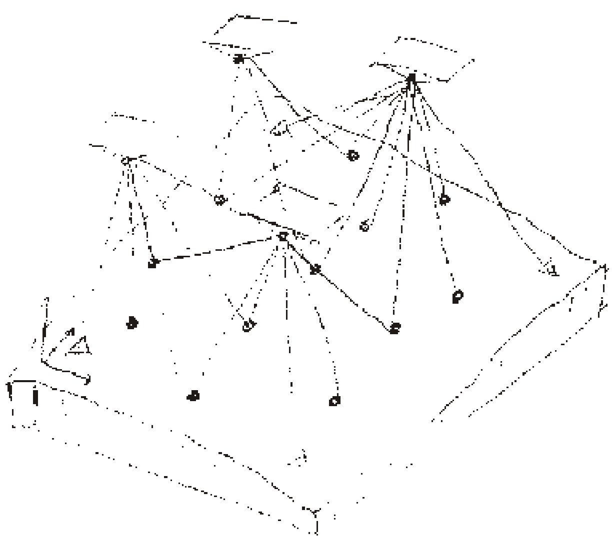
# 25 Блокаеротриангулација по методот на перспективни зраци

Појдовен материјал претставуваат склоп на снимки во облик на низови или блокови со цца 60% надолжен и 20% попречен преклоп.

При израмнувањето на блокот по методот на перспективни зраци се воспоставува директна врска помеѓу снимените координати и координатите на теренот.

Снимените координати се мерат на монокомпаратор, односно стереокомпаратор, или на аналитички реституциони инструмент.



– Принципот на израмнување може да се формулира:

Снопот од зраци се:

– транслаторно поместуваат ($X_0, Y_0, Z_0$)

– ротираат ($\omega, \varphi, \kappa$)

се додека зраците

* ~~н~~ не се сечат на врзните точки
* и што е можно подобро да се ~~преклопат~~ поклопат со ориентационите точки.

→ Математички модел помеѓу снимените и теренските координати

$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}(X-X_0) + r_{21}(Y-Y_0) + r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0) + r_{23}(Y-Y_0) + r_{33}(Z-Z_0)} = \xi_0 - c\,\frac{Z_x}{N}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}(X-X_0) + r_{22}(Y-Y_0) + r_{32}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0) + r_{23}(Y-Y_0) + r_{33}(Z-Z_0)} = \eta_0 - c\,\frac{Z_y}{N}$$

→ Равенки на поправки

$$V_{\xi_{ij}} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_0}\right)^0 d X_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_0}\right)^0 d Y_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_{0j}}\right)^0 d Z_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega_j}\right)^0 d \omega_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j}\right)^0 d \varphi_j +$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial \kappa_j}\right)^0 d \kappa_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_i}\right)^0 d X_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_i}\right)^0 d Y_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_i}\right)^0 d Z_i - \left(\bar{\xi}_{ij} - \xi^0_{ij}\right)$$

---

$$V_{\eta_{ij}} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_0}\right)^0 d X_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_{0j}}\right)^0 d Y_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_{0j}}\right)^0 d Z_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega_j}\right)^0 d \omega_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_j}\right)^0 d \varphi_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \kappa_j}\right)^0 d \kappa_j$$

$$+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_i}\right)^0 d X_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_i}\right)^0 d Y_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_i}\right)^0 d Z_i - \left(\bar{\eta}_{ij} - \eta^0_{ij}\right)$$

---

или

$$V_{\xi_{ij}} = a_2\, d X_{0j} + a_3\, d Y_{0j} + a_4\, d Z_{0j} + a_5\, d \omega_j + a_6\, d \varphi_j + a_7\, d \kappa_j + a_8\, d X_i +$$

$$+ a_9\, d Y_i + a_{10}\, d Z_i + f_{\xi_i}$$

$$V_{\eta_{ij}} = b_2\, d X_{0j} + b_3\, d Y_{0j} + b_4\, d Z_{0j} + b_5\, d \omega_j + b_6\, d \varphi_j + b_7\, d \kappa_j + b_8\, d X_i +$$

$$+ b_9\, d Y_i + b_{10}\, d Z_i + f_{\eta_i}$$

Непознати се шест елементи на надворешна ориентација на снимката (j) и три координати на точката (i) во теренскиот коор. систем.

$(\ )^0$ - диференцијални одредени со помош на приближни вредности на непознатите

$\bar{\xi}_{ij}$ и $\bar{\eta}_{ij}$ - мерени сликовни координати

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{\partial \xi_*}{\partial c}\right)^0 dc & \qquad b_0 &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial c}\right)^0 dc \\ a_1 &= \left(\frac{\partial \xi_*}{\partial \xi_0}\right)^0 d\xi_0 & \qquad b_1 &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}\right)^0 d\eta_0 \end{aligned}\right\} \text{непозната внатрешна ориентација}$$

# Точност на блокаеротриангулацијата на перспективни зраци

Граница за постигнување на точност за сигнализирани точки во еден блок со правилен облик со 60% надолжен и 20% попречен преклоп при израмнување со метод на перспективни зраци е:

$\sigma_{xy} = \pm 4 \mu m$ - во рамнината на снимката

$\sigma_z = \pm 0{,}004\% \, h_c$ - за ТА, НА, ША камери

$= \pm 0{,}005\% \cdot h_c$ - за США камери

→ Предности и недостатоци при израмнување на блок со метод на перспективни зраци:

* Недостатоци:

- нелинеарен проблем (комплициран процес за обезбедување на приближните вредности на непознатите)
- просторен проблем (не е можно раздвојување на положбено и висинско израмнување)

* Предности

- најточна метода (директна врска меѓу сликовните и теренските координати)
- можност за едноставно воведување на дополнителни параметри
- можност за воведување на нефотограметриски информации (мрежа на должини, агли ...)
- можност за решавање на неконвенционални диспозиции на снимање и аматерски снимки.

# Дополнителни мерења при израмнување на блокот

→ Геодетски мерења

* должини

$$s_{ij}^0 = \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2}$$

$$v_{s_{ij}} = \left(\frac{\partial s}{\partial X_i}\right)^0 dX_i + \left(\frac{\partial s}{\partial Y_i}\right)^0 dY_i + \left(\frac{\partial s}{\partial X_j}\right)^0 dX_j + \left(\frac{\partial s}{\partial Y_j}\right)^0 dY_j + (s_{ij}^0 - \bar{s}_{ij})$$

Ако мерената должина е помеѓу една позната и една непозната точка тогаш во равенката на поправка влегуваат прирастите само за новата точка.

Во терестричка фотограметрија се мерат должините помеѓу снималиштата, па прирастите се однесуваат на координатите на проекционите центри.

Ако се мерат просторни должини, равенката на поправка треба да се прошири со прираст за Z-координата.

На сличен начин се формираат и р-ки на поправки за мерени агли, правци, азимути, висински разлики итн., и се комбинираат со равенките на поправки за блок израмнување по методот на независни модели или перспективни праци.

→ Мерења во текот на фотограметриското снимање

Најпознато е статоскопското мерење на висинските разлики помеѓу соседните снималишта. Висинската разлика може да се внесе во израмнувањето:

$$v_{\Delta Z_{ij}} = Z_{0i} - Z_{0j} - \Delta Z_{0ij}$$

— бидејќи во основниот систем на равенки фигурираат прирастите $dZ_0$ потребно е да се направи дополнителна линеаризација:

$$V_{\Delta Z_{ij}} = dZ_{o.i} - dZ_{o.j} + (\Delta Z^{o}_{o.ij} - \overline{\Delta Z}_{o.ij})$$

$$\Delta Z^{o}_{ij} = Z^{o}_{oi} - Z^{o}_{oj}$$

→ Услови на оформување

Равенка на поправка за две точки кои лежат во иста хоризонтална рамнина: $V_{\Delta Z_{ij}} = Z_i - Z_j$

со линеаризација се добива $V_{\Delta Z_{ij}} = dZ_i - dZ_j + \Delta Z^{o}_{ij}$ ; $\Delta Z^{o}_{ij} = Z^{o}_i - Z^{o}_j$

Две нови точки од некој вертикален раб можат да се земат во предвид со следните две р-ки на поправки:

$$V_{\Delta X_{ij}} = X_i - X_j \quad ; \quad V_{\Delta Y_{ij}} = Y_i - Y_j$$

После линеаризација =>

$$V_{\Delta X_{ij}} = dX_i - dX_j + \Delta X^{o}_{ij} \quad ; \quad V_{\Delta Y_{ij}} = dY_i - dY_j + \Delta Y^{o}_{ij}$$

$$\Delta X^{o}_{ij} = X^{o}_i - X^{o}_j \quad ; \quad \Delta Y^{o}_{ij} = Y^{o}_i - Y^{o}_j$$

– три и повеќе точки
  * на права линија (пр. раб на тротоар на улица)
  * на вертикална рамнина (пр. фасада на зграда)

– четири и повеќе точки
  * на било каква рамнина (пр. наклонета површина на улица)
  * на паралелни прави (пр. железничка пруга)
  * на вертикални паралелни површини (пр. две фасади)

Дополнителните мерења водат кон нормални равенки кои имаат на лента по должината на главната дијагонала од матрицата на нормалните равенки.

Исто така заради слабо исполнетата матрица на коефициентите на равенките на поправки => слабо исполнета матрица на коефициентите на нормалните равенки (со многу нула елементи).

# Непознати како мерења и константи како непознати

28

→ Непознати како мерења

Во аерофотограметријата некои од елементите на надворешната ориентација можат да бидат регистрирани во текот на самото снимање. Овие информации се земаат во предвид при израмнувањето на блокаеротриангулацијата на тој начин што, од основниот систем на равенки на поправки ќе се исфрли елементот кој се однесува на „мерената непозната", а за секоја од нив се воведува нова равенка на поправка за мерената вредност која се додава кон основниот систем на равенки на поправки. Така на пример навигацискиот систем на авионот овозможува да се регистрира наклонот на камерата $\omega$ и $\varphi$. За секоја снимка за која се познати овие вредности, кон основниот систем треба да се прикључат следните равенки на поправки:

$V_\omega = \omega - \bar{\omega}$ $\bar{\omega}, \bar{\varphi}$ – мерени големини

$V_\varphi = \varphi - \bar{\varphi}$ $\omega, \varphi$ – непознати кои се одредуваат од израмнувањето.

по линеаризација =>

$$V_\omega = d\omega + (\omega^\circ - \bar{\omega})$$

$$V_\varphi = d\varphi + (\varphi^\circ - \bar{\varphi})$$

Во блок израмнувањето можат да се земат и други информации во врска со елементите на надворешната ориентација како на пр. положбата и височината на проекционите центри на поединечните аерофотограметриски снимки.

→ Константа како непозната

Основниот систем на равенки на поправки со блокизрамнувањето може да биде проширен и за елементите на внатрешната ориентација кои се познати како „константни" вредности.
За таа цел во основниот систем се додаваат елементите за $d\xi_0$, $d\eta_0$, и $dc$, а се додаваат линеаризираните равенки на поправки:

$$V_{\xi_0} = d\xi_0 + (\xi_0^\circ - \bar{\xi}_0)$$

$$V_{\eta_0} = d\eta_0 + (\eta_0^\circ - \bar{\eta}_0)$$

$$V_{c_0} = dc_0 + (c^\circ - \bar{c})$$

$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{c}$ – елементи на внатрешна ориентација од протоколот за калибрација

$\xi_0^\circ, \eta_0^\circ, c^\circ$ – приближни вредности на елементите на внатрешна ориентација

Геодетските ориентациони точки во блокизрамнувањето се третираат како мерени големини кои не се ослободени од грешки. Затоа, за ориентационите точки кон основниот систем на равенки на поправки се додаваат следните равенки:

$$V_{X_i} = dX_i + (X_i^\circ - \bar{X}_i)$$

$$V_{Y_i} = dY_i + (Y_i^\circ - \bar{Y}_i)$$

$$V_{Z_i} = dZ_i + (Z_i^\circ - \bar{Z}_i)$$

$\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ – координати на ориентационите точки

$X_i^\circ, Y_i^\circ, Z_i^\circ$ – приближни координати на ориентационите точки

# Контрола на точноста на елементите на внатрешна ориентација

Како контрола, отпрака калибрирање на мерната камера ќе се одвива во временски интервали. Калибрирањето може да се спроведе на тест полигон или со тест фигура со одредени контролни точки со идеални точки.

По спроведување на аеротриангулацијата во која елементите на внатрешната ориентација се третирани како непознати (т.н. аеротриангулација со самокалибрација), покрај елементите на надворешната ориентација се добиваат и елементите на внатрешната ориентација.

Се поставува прашање, дали добиените елементи на внатрешната ориентација во споредба со оние во протоколот за калибрација од производителот на камерата се значително променети.

За одговор на поставеното прашање се поставува нулта и алтернативна хипотеза:

$H_0$ → настанатите разлики не се значајни (можат да се објаснат со случајни грешки на калибрирањето), наспроти

$H_a$ → настанатите разлики се значајни, односно постои промена на елементите на внатрешната ориентација.

Под услов грешките при двете калибрации да имаат нормален распоред, само во 5% случаеви на отфрлена нулта хипотеза ќе донесеме погрешен заклучок.

Евентуалните грешки предизвикани од деформација на филмот или грешка на мерниот уред, доаѓа до израз при математичкото вклопување на мерените сликовни координати во координатниот

Сметен на снимката, преку координатите на рабните марки како идентични точки во двата координатни системи. За тоа ќе се користи афина или билинеарна трансформација, и преку анализа на трансформационите параметри може да се дојде до заклучок за евентуални деформации на филмот, односно до грешки на уредот за мерење на снимените координати.

# 30 Контрола на точноста на релативната ориентација

Точноста на нумеричката релативна ориентација се добива од инверзната матрица на нормалните равенки $Q_{xx} = N^{-1}$ и од точноста на мерењето на y-паралаксата $\sigma_{p_y}$.

При добивањето на релативната ориентација рачунски на емпириски и аналитички инструменти се добиваат параметри за точноста на елементите од релативната ориентација, при што следува ориентирање, дали тие добиените параметри се добиени точно или не.

Ова потребно е нарочно во случаеви кога не може да се добие оптимален распоред на точки за ориентација.

Како критериум за споредување на точноста на релативната ориентација на секој поединечен модел може да послужат параметрите на точноста на идеален модел (приближно рамен терен и оптимален распоред на точки за ориентација).

– За моделски координати:

$$\sigma_{\varepsilon_1} = \sigma_{\varepsilon_2} = \frac{h}{\sqrt{2} \cdot a \cdot b} \cdot \sigma_{p_y}$$

$$\sigma_{\omega_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \sigma_{p_y}$$

$$\sigma_{\kappa_1} = \sigma_{\kappa_2} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{h^2}{a^2} + \frac{3}{4} \frac{h^4}{a^4}} \cdot \sigma_{p_y}$$

– За сликовни координати:

ако големините кои се однесуваат на модел $(h, a, b, \sigma_{p_y})$ се заменат соодветно со големините на снимо $(c, b, d, \sigma_{p_\eta})$ =>

$$\sigma_{\varepsilon_1} = \sigma_{\varepsilon_2} = \frac{c}{\sqrt{2} \cdot d^2} \cdot \sigma_{p_\eta}$$

$$\sigma_{\omega_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c}{d^2} \cdot \sigma_{p_\eta}$$

$$\sigma_{\kappa_1} = \sigma_{\kappa_2} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{3}{4} \frac{c^4}{d^4}} \cdot \sigma_{p_\eta}$$

31 Контрола на точноста на апсолутната ориентација

Од системот на нормални равенки можат да се одредат средните грешки на трите транслации $(X_0, Y_0, Z_0)$, факторот на размер $(\lambda)$.

$$\sigma_{X_0}^2 = \sigma_{Y_0}^2 = \sigma_{Z_0}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n}$$ — $n$ - број точки на [illegible]

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{\sigma_0^2}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

Варијанс-коваријанс матрицата [illegible] за трите агли на ротација $\Omega, \Phi, K$ се добива со инверзија на соодветните коефициенти од системот на нормалните равенки.

Точноста на трансформацијата од моделниот во теренскиот систем зависи од точноста на трансформационите параметри (елементите на апсолутната ориентација) и од точноста на мерените моделски координати. Притоа, најнапред треба да се одредат корелативните зависности помеѓу X, Y, Z - координатите и $\Omega$, $\Phi$ и $K$ - ротациите.

- Точноста на една трансформирана точка е:

$$\sigma_X^2 = \sigma_{X_0}^2 + \bar{x}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{X,\Omega\Phi K}^2 + \sigma_x^2$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{Y_0}^2 + \bar{y}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{Y,\Omega\Phi K}^2 + \sigma_y^2$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{Z_0}^2 + \bar{z}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{Z,\Omega\Phi K}^2 + \sigma_z^2$$

$\Downarrow$

Параметрите на транслација имаат еднакво влијание по трите координатни оски, факторот на размерот има најголемо влијание на X-оската, бидејќи моделот во овој правец има најголемо протегање, потоа доаѓа влијанието на параметрите на ротација $(\Omega, \Phi, K)$. При што кај $Z$-оската тоа е најголемо, бидејќи, аглите $Z$ и $\varphi$ се поместени околу $K$, и на крај, додава влијанието на точноста на мерните моделски координати.

# Внатрешна поузданост

32

Ако имаме поклопена трансформација на координати, од резулта-
тите на израмнувањето лесно да се изведат некои заклучоци, како
на пример:

- грубата грешка во едно мерење се рефлектира во поправката на соодветното мерење само со мал дел (на пр. груба грешка на една точка од $+1.0m$ во соодветната поправка учествува само со $0.11m$)
- најголемиот износ на поправката не мора да се однесува на грубо погрешното мерење.

Равенки на поправки во матрична форма:

$$V = Ax - l \qquad x = (A^T P_{ll} A)^{-1} A^T P_{ll}\, l$$

$$P_{ll} = Q_{ll}^{-1} \qquad Q_{xx} = (A^T P_{ll} A)^{-1}$$

- Со замена на $x$ во $v$ и со примена на законот за пренос на грешки $\Rightarrow$

$$Q_{vv} = Q_{ll} - A(A^T P_{ll} A)^{-1} A^T = Q_{ll} - A Q_{xx} A^T$$

$Q_{vv}$ ја изразува зависноста помеѓу мерењата $l$ и поправките $v$:

$$v = -(Q_{vv} P_{ll})\, \Delta l$$

$Q_{vv}$ го дава одговорот за зависноста помеѓу грешките при мерењето $\Delta l$ и соодветните поправки $v$.



$$\text{trag}\; Q_{vv} = \sum r_i = r$$

$r_i$ - компонента на редундансата на мерењето $l_i$ $(0 \le r_i \le 1)$

$$\sigma_{l_i} = \sigma_0\sqrt{(Q_{ll})_{ii}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{(P_{ll})_{ii}}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_i}}$$

$\sigma_0$ – средна грешка на единица тежина

$p_i$ – тежина на мерењето $l_i$.

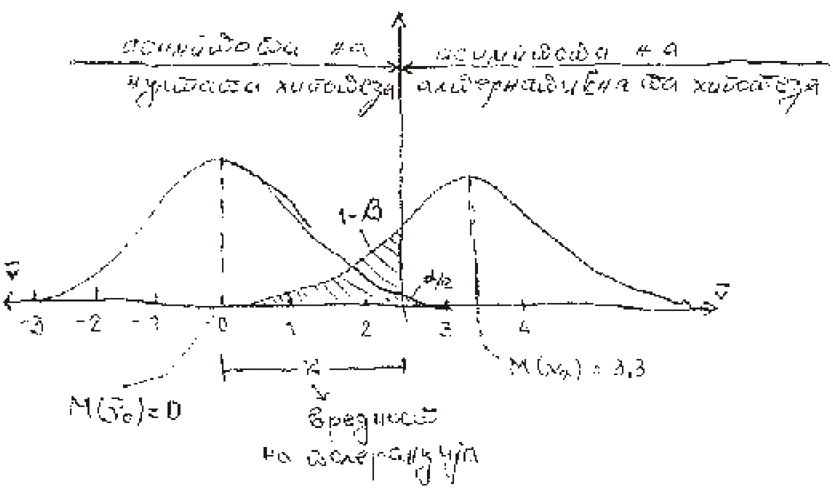
аналогно следува и тежината на поправките:

$$\sigma_{v_i} = \sigma_0\sqrt{(Q_{vv})_{ii}} = \ldots = \sigma_{l_i}\sqrt{r_i}$$

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_i}}$$

Ако $v \approx N(0,\sigma_v) \rightarrow \bar{v} \approx N(0,1)$

– Најголемата нормирана ~~грешка~~ поправка ќе припаѓа на мерењето со грубата грешка (пример за точка со +1cm груба грешка), која е над бараната толеранција, при што се бара елиминација на тоа мерење.




$H_0$: во мерењата не постои груба грешка

$M(\bar{v}_0) = 0$ ; $\sigma_{\bar{v}} = \pm 1$

$H_a$: во мерењата постои барем едно мерење со груба грешка

$M(\bar{v}_a) \neq 0$ ($M(\bar{v}_a) = 3,3$)

– При вистинитата $H_0$ и усвоената толеранција $k$, т.е.

$P(\bar{v} < k) = 1-\alpha$, односно $\bar{v}$ паѓа во областа на прифаќање, и

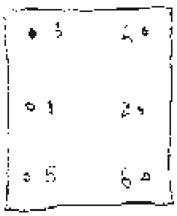
$P(\bar{v} > k) = \frac{\alpha}{2}$ ; односно $\bar{v}$ паѓа во областа на отфрлање

– правилна одлука $p = 1-\alpha$

– погрешна одлука (грешка од прв вид т.е. погрешно отфрлање на $H_0$) $p =$
$p = \alpha$, ($\alpha$ – ниво на значајност)

# Поузданост на релативната ориентација

За релативна ориентација со 6 точки, $Q_{vv}$ матрицата ги има следниве елементи:



$$Q_{vv} = \begin{bmatrix} 0.33 & -0.33 & -0.17 & 0.17 & -0.17 & 0.17 \\ & 0.33 & 0.17 & -0.17 & 0.17 & -0.17 \\ & & 0.08 & -0.08 & 0.08 & -0.08 \\ & & & 0.08 & -0.08 & 0.08 \\ & & & & 0.08 & -0.08 \\ & & & & & 0.08 \end{bmatrix}$$

Со анализа на $Q_{vv}$ може да се извлечат следниве заклучоци:

- заради малата редундантност $r_i = 1$, елементите на главната дијагонала се доста мали ($\sum r_i = 1$)
- елементите надвор од главната дијагонала се приближно еднаква големина со елементите од главната дијагонала, што значи дека помеѓу поправките постои висок степен на корелација.
- апсорпцијата на една груба грешка во мерената на паралаксата во точките 3, 4, 5 и 6 изнесува 92%.
- внатрешната поузданост во овие точки за $M(v_a)_{gm} = 4$ изнесува

$$VP = 4 \cdot \frac{\sigma_{ph}}{\sqrt{0.08}} = 14 \cdot \sigma_{ph}$$

- надворешната поузданост е исто така мала.

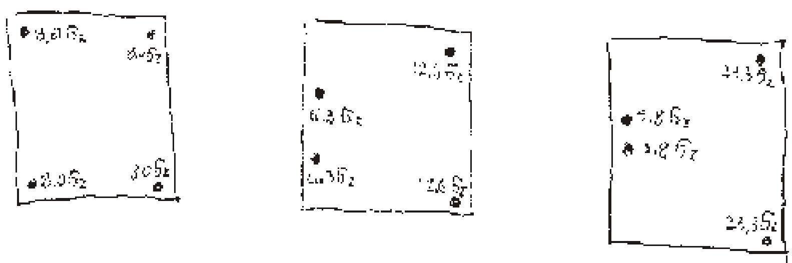
35 Точност на апсолутна ориентација.

→ Пр:

– 4 ориентациони точки во аглите на моделот при што се добива компонентата на редундацијата од $r_i = 0{,}5$

$$VP = \frac{4\cdot\sigma_{xz}}{\sqrt{0{,}5}} = 5.7\cdot\sigma_{xy}$$

– точноста на висинското израмнување (=> зависи од распоредот на точките)



– 6 ориентациони точки

$$Q_{vv} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & & & & & \\ & 0{,}67 & & & & \\ & & 0{,}42 & & & \\ & & & 0{,}42 & & \\ & & & & 0{,}42 & \\ & & & & & 0{,}42 \end{bmatrix}$$

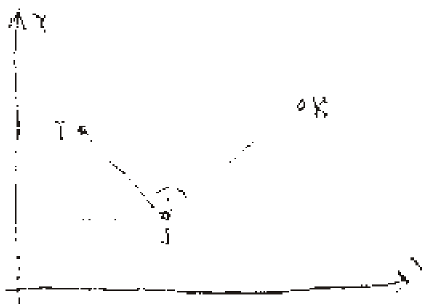
– за 4 ~~точки~~ ориентациони точки во аглите на моделот внатрешната точност (прецизноста) изнесува:

$$VP = \frac{4\cdot\sigma_z}{\sqrt{0{,}42}} = 6.2\cdot\sigma_z$$

Другите точки во аглите на моделот ја подобруваат точноста.

$$VP = \frac{4\cdot\sigma_z}{\sqrt{1}} = 4\cdot\sigma_z$$

# Услови на обликување - ортогоналност




- условот дека правите кои поврзуваат три точки I, J и K формираат прав агол следи од скаларниот производ на два вектора $\vec{JI}$ и $\vec{JK}$:

$$\vec{JI}\cdot\vec{JK} = \begin{vmatrix} X_i - X_j \\ Y_i - Y_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_k - X_j \\ Y_k - Y_j \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots (1)$$

$$(X_i - X_j)(X_k - X_j) + (Y_i - Y_j)(Y_k - Y_j) = 0 \quad \cdots (2)$$

Координатите X Y ~~кои во~~ (2) се условни (израмнати) ~~кои~~ составени од мерените $\bar{X}\ \bar{Y}$ координати и поправките $V_x$ и $V_y$

Нелинеарната условна р-ка гласи:

$$\left[(\bar{X}_i + V_{X_i}) - (\bar{X}_j + V_{X_j})\right]\left[(\bar{X}_k + V_{X_k}) - (\bar{X}_j + V_{X_j})\right] +$$
$$+ \left[(\bar{Y}_i + V_{Y_i}) - (\bar{Y}_j + V_{Y_j})\right]\left[(\bar{Y}_k + V_{Y_k}) - (\bar{Y}_j + V_{Y_j})\right] = 0 \quad \cdots (3)$$

По средувањето, ограничувајќи се на членовите од I ред се добива линеарна условна р-ка за израмнување на условни набљудувања:

$$(\bar{X}_k - \bar{X}_j)V_{X_i} + (\bar{Y}_k - \bar{Y}_j)V_{Y_i} + (2\bar{X}_j - \bar{X}_i - \bar{X}_k)V_{X_j} +$$
$$+ (2\bar{Y}_j - \bar{Y}_i - \bar{Y}_k)V_{Y_j} + (\bar{X}_i - \bar{X}_j)V_{X_k} + (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j)V_{Y_k} + w_{ijk} = 0 \quad \cdots (4)$$

каде што $w_{ijk} = (\bar{X}_i - \bar{X}_j)(\bar{X}_k - \bar{X}_j) + (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j)(\bar{Y}_k - \bar{Y}_j)$

Доколку за некој објект постојат повеќе услови на прави агол, за секој независен услов се формира по една равенка (4), и сите условни р-ки составени во еден систем се решаваат.

- Матрично

$$A^T V + w = 0$$

$$(A^T P^{-1} A) k + w = 0 \quad \ldots (6)$$

$$k = -(A^T P^{-1} A)^{-1} \cdot w$$

$$V = P^{-1} A k$$

- Во системот на равенки воведена е матрица на тежини која ја регулира точноста на мерењето на фотограметриските координати.

Пред да се отпочне со израмнувањето потребно е да се провери дали во мерените големини постојат груби грешки. За таа цел се пресметува средна грешка $\sigma_w$ на отстапувањето $w_{ijk}$, која се добива од средните грешки на мерените координати $\sigma_{XY}$, а потоа се споредува вистинското отстапување со одбрана дозволена толеранција.

$$\sigma_w^2 = \Big[ (\bar{X}_k - \bar{X}_j)^2 + (\bar{Y}_k - \bar{Y}_j)^2 + (2\bar{X}_i - \bar{X}_i - \bar{X}_k)^2 +$$
$$+ (2\bar{Y}_i - \bar{Y}_i - \bar{Y}_k)^2 + (\bar{X}_i - \bar{X}_j)^2 + (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j)^2 \Big] \sigma_{XY}^2$$

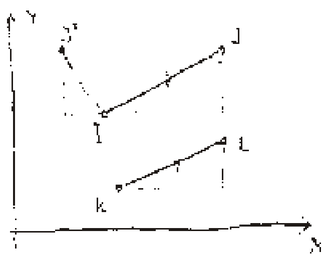
или со повеќекратна примена на Питагорова теорема

$$\sigma_w = \sqrt{2} \cdot \overline{IK} \cdot \sigma_{XY}$$

Ако нормираното отстапување $\bar{w}_{ijk}$ е помало од усвоената толеранција се усвојува претпоставката дека во мерените координати нема груби грешки, т.е.: $|\bar{w}_{ijk}| = \dfrac{|w_{ijk}|}{\sigma_w} \le k$

# Услови на сомикување - паралелност

Условот правата на поврзување $\overline{IJ}$ да е паралелна со правата $\overline{KL}$ следи од скаларниот производ на векторот $\overrightarrow{IJ'}$ кој е под прав агол на векторот $\overrightarrow{IJ}$ и векторот $\overrightarrow{KL}$.




$$\overrightarrow{IJ'}^{T} \cdot \overrightarrow{KL} = \begin{vmatrix} -(Y_j - Y_i) \\ (X_j - X_i) \end{vmatrix}^{T} \begin{vmatrix} X_l - X_k \\ Y_l - Y_k \end{vmatrix}$$

или

$$-(Y_j - Y_i)(X_l - X_k) + (X_j - X_i)(Y_l - Y_k) = 0 \quad (1)$$

Координатите во изразот (1) се израмнати, добиени од мерените вредности и соодветните поправки. Условната р-на во нелинеарна форма гласи:

$$\left[(\bar{Y}_j + v_{Y_j}) - (Y_i + v_{Y_i})\right]\left[(\bar{X}_l + v_{X_l}) - (\bar{X}_k + v_{X_k})\right] -$$

$$-\left[(\bar{X}_j + v_{X_j}) - (\bar{X}_i + v_{X_i})\right]\left[(\bar{Y}_l + v_{Y_l}) - (\bar{Y}_k + v_{Y_k})\right] = 0$$

Линеаризираната условна р-на за израмнување според условните мерења гласи:

$$(\bar{Y}_l - \bar{Y}_k) v_{X_i} + (\bar{X}_k - \bar{X}_l) v_{Y_i} + (\bar{Y}_k - \bar{Y}_l) v_{X_j} + (\bar{X}_l - \bar{X}_k) v_{Y_j} +$$

$$+ (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) v_{X_k} + (\bar{X}_j - \bar{X}_i) v_{Y_k} + (\bar{Y}_j - \bar{Y}_i) v_{X_l} + (\bar{X}_i - \bar{X}_j) v_{Y_l} + w_{ijkl} = 0$$

каде: $w_{ijkl} = (\bar{Y}_j - \bar{Y}_i)(\bar{X}_l - \bar{X}_k) - (\bar{X}_j - \bar{X}_i)(Y_l - Y_k)$

Ако еден објект има повеќе независни услови може да се формира систем од условни кој може да се реши согласно изразите

$A^T v + w = 0$ $\qquad k = -(A^T P^{-1} A)^{-1} w$

$(A^T P^{-1} A) k + w = 0$ $\qquad v = P^{-1} A k$

За тестирање на отстапувањата Wijke на присуство на груби грешки, потребно е да се одреди средна грешка $\sigma_w$ на отстапувањето:

$$\sigma_w^2 = \left[ (\bar{Y}_L - \bar{Y}_K)^2 + (\bar{X}_K - \bar{X}_L)^2 + (\bar{Y}_K - \bar{Y}_L)^2 + (\bar{X}_L - \bar{X}_K)^2 + (\bar{Y}_I - \bar{Y}_J)^2 + (\bar{X}_J - \bar{X}_I)^2 + (\bar{Y}_I - \bar{Y}_J)^2 + (\bar{X}_I - \bar{X}_J)^2 \right] \sigma_{XY}^2$$

или применувајќи ја Питагоровата теорема за :

$$\sigma_w = \sqrt{2(\overline{IJ}^2 + \overline{KL}^2)} \cdot \sigma_{XY}$$

Ако двете прави $\overline{IJ}$ и $\overline{KL}$ се со иста должина =>

$$\sigma_w = (\overline{IJ} + \overline{KL})\sigma_{XY}$$

# Полиномска интерполација на криви линии

Задачата се состои во образување на дискретни точки во TS рамнина (координатен систем чија апсциса е параметарот T, а ординатата параметарот S) со крива линија.

Ако бројот на дискретни точки е n тогаш се бара полином од (n-1)-ви степен.

$$S = a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_{n-1}T^{n-1}$$

Коефициентите $a_i$ можат да се добијат од ~~л~~ линеарните системи на р-ки:

$$S_i = a_0 + a_1T_i + a_2T_i^2 + \dots + a_{n-1}T_i^{n-1} \quad ; \quad i = 1,2,3 \dots n$$

Одредувањето на полиномските коефициенти, може да се одреди и без решавање на системи од р-ки (Лагранж). За таа цел за секоја потпорна точка се воведува една т.н. базисна функција $g_i(T)$.

$$g_i(T) = \frac{(T-T_1)(T-T_2)\dots(T-T_{i-1})(T-T_{i+1})\dots(T-T_n)}{(T_i-T_1)(T_i-T_2)\dots(T_i-T_{i-1})(T_i-T_{i+1})\dots(T_i-T_n)}$$

$$S = S(T) = g_1(T)S_1 + \dots + g_i(T)S_i + \dots + g_n(T)S_n = \sum_{i=1}^{n} g_i(T)S_i = g^TS$$

Квалитетот на полиномската ~~интерполација~~ интерполација е прифатлив во средината на кривата, додека на периферијата доаѓа до помали или поголеми осцилации.

→ При вистинита $H_a$ и усвоена толеранција к, т.е.:

$P(\bar{v} < k) = \beta$, односно $\bar{v}$ паѓа во областа на отфрлање, и

$P(\bar{v} > k) = 1 - \beta$, односно $\bar{v}$ паѓа во областа на прифаќање

– погрешна одлука (грешка од втор вид т.е погрешно отфрлање на $H_a$) $= \beta$.

– исправна одлука $\bar{\beta} = 1 - \beta$ (моќ на тестот).

Зголемување на моќта на тестот (= намалување на грешката од втор вид):

– намалување на толеранцијата к за сметка на поголемо ниво на сигнификантност $\alpha$

– зголемување на должината на мерените големини при што $\sigma_{v_i}$ се намалува додека очекуваната вредност на нормираната поправка $M(v_a)$ се зголемува.

– поголеми груби грешки доведуваат до зголемување на $M(v_a)$

При предходно зададени $\alpha$ и $\beta$, може да се одреди $M(\bar{v}_a)_{gran}$.
Врз основа на $M(\bar{v}_a)_{gran}$ и $\alpha, \beta$ се добива:

$$M(\Delta e_a)_{gran} = \frac{M(\bar{v}_a)_{gran}}{\sqrt{r_i}} \sigma_{e_i}$$

каде што $M(\Delta e_a)_{gran}$ означува големина на минималната грешка во мерењето која при тестот со нормирани поправки може да биде откриена.

$M(\Delta e_a)_{gran}$ – се нарекува внатрешна доверливост

– надворешна доверливост произлегува од внатрешната доверливост на x - координатата на точката:

$$M(\Delta X_a)_{gran} = [A^T P_{ee} A]^{-1} A^T P_{ee} \Delta e$$

→ При висината $H_a$ и усвоена толеранција $k$, т.е.:

$P(\bar{v} < k) = \beta$, односно $\bar{v}$ паѓа во областа на отфрлање, а

$P(\bar{v} > k) = 1 - \beta$, односно $\bar{v}$ паѓа во областа на прифаќање

− погрешна одлука (грешка од втор род т.е. погрешно отфрлање на $H_a$) $= \beta$.

− исправна одлука $\gamma = 1 - \beta$ (моќ на тестот).

Зголемување на моќта на тестот (намалување на грешката од втор род)

− намалување на толеранцијата $k$ за сметка на поголема на сигнификантноста $\alpha$

− зголемување на точноста на мерените големини при што $\sigma_{v_i}$ се намалува додека очекуваната вредност на нормираната поправка $M(v_a)$ се зголемува.

− поголеми груби грешки доведуваат до зголемување на $M(v_a)$

При претходно зададени $\alpha$ и $\beta$, може да се одреди $M(\bar{v}_a)_{gran}$.
Врз основа на $M(\bar{v}_a)_{gran}$ и $\alpha, \beta$ се добива:

$$M(\Delta e_a)_{gran} = \frac{M(\bar{v}_a)_{gran}}{\sqrt{r_i}} \sigma_{e_i}$$

каде што $M(\Delta e_a)_{gran}$ ја означува големината на минималната грешка во мерењето која при тест со нормирани поправки може да биде откриена.

$M(\Delta e_a)_{gran}$ − се нарекува внатрешна поузданост

− надворешна поузданост произлегува од внатрешната поузданост на х - координатата на точката:

$$M(\Delta X_a)_{gran} = [A^T P_{ee} A]^{-1} A^T P_{ee} \Delta e$$

# Интерполација со сложени полиноми

За намалување на непожелните осцилации на краевите на кривата се препорачува да се редуцира степенот на полиномот, односно повисоките изводи на функцијата да бидат нула. Од друга страна функцијата треба да мине низ сите потпорни точки. Затоа, наместо еден полином од висок степен, треба да се користат повеќе полиноми од низок степен кои се надоврзуваат еден до друг. Тоа значи дека помеѓу две потпорни точки се користат посебни полиноми (парчиња), чии крајни точки (јазолни точки) се поклопуваат со потпорните точки.

Сложените линеарни полиноми, познати како полигонски влак, кои ја имаат особината да не предизвикуваат осцилации на краевите, но, од друга страна тангентата (првиот извод) во јазолните точки е променлив, а исто така и кривината (вториот извод) е еднаква на нула. Заради тоа за многу линии од теренот не можат да бидат применети.

Примената на квадратните сложени полиноми не секогаш дава добра апроксимација на теренските линии.

Сложените кубни полиноми се ~~доста~~ доста флексибилни со кои можат да се опфатат скоро сите линии на теренот, а исто така нивниот степен е низок за да не предизвикаат нерегуларни осцилации. Кубен полином за интервал $[T_i, T_{i+1}]$

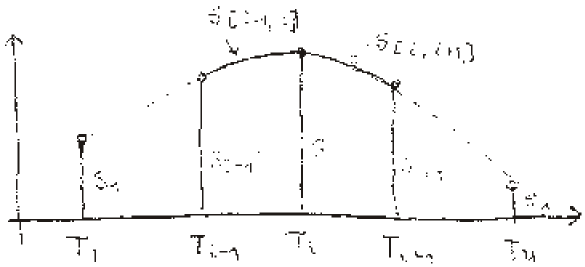
$$S_{[i,i+1]} = a_{0[i,i+1]} + a_{1[i,i+1]}(T-T_i) + a_{2[i,i+1]}(T-T_i)^2 + a_{3[i,i+1]}(T-T_i)^3$$

За $n$ потпорни точки зададени со $T_i$ и $S_i$ коор., кубниот полином може да се одреди.

Прирастот $S'_{[i,i+1]}$ и кривината $S''_{[i,i+1]}$ на кубниот полином $S_{[i,i+1]}$ се добиваат:

$$S'_{[i,i+1]} = a_{1[i,i+1]} + 2a_{2[i,i+1]}(T-T_i) + 3a_{3[i,i+1]}(T-T_i)^2$$

$$S''_{[i,i+1]} = 2a_{2[i,i+1]} + 6a_{3[i,i+1]}(T-T_i)$$




— за добивање на вкупно $4(n-1)$ полиномски коефициенти $a$, од $n$ потпорни точки со нивните координати $T_i$ и $S_i$ => следните р-ки

* за секој $(n-1)$ полином, две р-ки со координатите на потпорните точ. $T_i, S_i$ и $T_{i+1}, S_{i+1}$

$$S_i = a_{0[i,i+1]}$$

$$S_{i+1} = a_{0[i,i+1]} + a_{1[i,i+1]}(T-T_i) + a_{2[i,i+1]}(T-T_i)^2 + a_{3[i,i+1]}(T-T_i)^3$$

* на секоја $(n-2)$ внатрешна јазелна точка прирастите од левата и десната страна треба да се исти, односно $S'_{[i-1,i]} = S'_{[i,i+1]}$

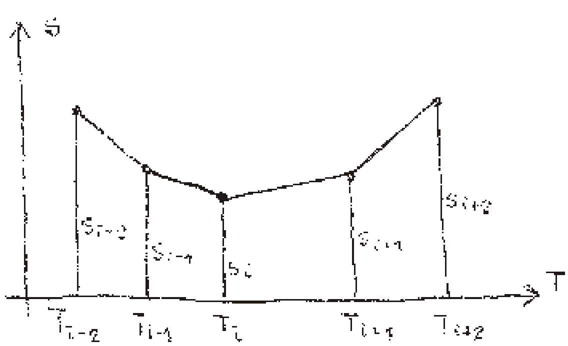
* на секоја $(n-2)$ внатрешна јазелна точка, кривините од левата и десната страна треба да се исти, т.е. $S''_{[i-1,i]} = S''_{[i,i+1]}$

# Акима интерполација 

Оваа интерполација врши поврзување на потпорните точки со кубни полиноми. За одредување на полиномските коефициенти потпорните точки имаат посебно влијание на непосредната околина.

Акимата интерполација започнува со одредување на прирастот $S'_i$ (прв извод) во конјунктните потпорни точки со помош на соседните две потпорни точки.

Прирастот на кривината се добива како средина од прирастите на претходната и наредната тетива.




$$tg\,\alpha_{i,i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{T_{i+1} - T_i}$$

аналогно и $tg\,\alpha_{i-2,i-1}$; $tg\,\alpha_{i-1,i}$; $tg\,\alpha_{i+1,i+2}$

$$S'_i = \frac{P_r \cdot tg\,\alpha_{i-1,i} + P_v \cdot tg\,\alpha_{i,i+1}}{P_r + P_v}$$

$$P_r = |tg\,\alpha_{i+1,i+2} - tg\,\alpha_{i,i+1}| \quad \ldots (1)$$

$$P_v = |tg\,\alpha_{i-1,i} - tg\,\alpha_{i-2,i-1}|$$

— Кај периодичните функции за решавање на системот (1) се поставуваат идентичностите:

$$(T_n, S_n) = (T_1, S_1);\ (T_{n+1}, S_{n+1}) = (T_2, S_2),\ (T_{n+2}, S_{n+2}) = (T_3, S_3)$$

— Кај непериодичните функции треба на почетокот и на крајот со помош на првите односно последните три точки да се одреди една парабола, а потоа на истата да се дефинираат по две нови точки.

Ако со помош на изразот (1) се одреди прирастот $S'_i$ во сите потпорни точки, тогаш со помош на изразот: $S_{[i,i+1]} = a_{0[i,i+1]} + a_{1[i,i+1]}(T-T_i) + a_{2[i,i+1]}(T-T_i)^2 + a_{3[i,i+1]}(T-T_i)^3 \ldots (2)$, можат да се одредат коефициентите $a_{0[i,i+1]}$, $a_{1[i,i+1]}$, $a_{2[i,i+1]}$ и $a_{3[i,i+1]}$ на кубните полиноми $S_{[i,i+1]}$ за секој интервал $[T_i, T_{i+1}]$.

Во јазелните точки на располагање ни стојат координатите $T_i$, $S_i$ и прирастот $S'_i$ кои соодветна јазелна точка со коор. $T_{i+1}$, $S_{i+1}$ и прираст $S'_{i+1}$.

Ако место $S_{[i,i+1]}$ и $T$ во изразот (2) се ставаат првобитни координати $S_i, T_i$ и $S_{i+1}, T_{i+1}$ и наместо $S'_{[i,i+1]}$ и $T$ се стават првобитни координати $S'_i, T_i$ и $S'_{i+1}, T_{i+1}$ ќе се добијат 4 р-ки од кои може да се добијат горенаведените коефициенти

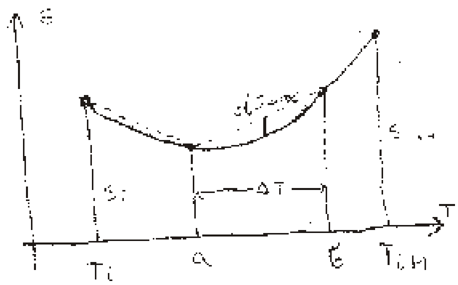
$$a_0[i,i+1] = S_i \qquad a_2[i,i+1] = \frac{-S'_{i+1} - 2S'_i}{T_{i+1} - T_i} + 3\,\frac{S_{i+1} - S_i}{(T_{i+1} - T_i)^2}$$

$$a_1[i,i+1] = S'_i$$

$$a_3[i,i+1] = \frac{S'_{i+1} + S'_i}{(T_{i+1} - T_i)^2} - 2\,\frac{S_{i+1} - S_i}{(T_{i+1} - T_i)^3}$$

## 4.2 Апроксимација на криви со полигонална линија

Бидејќи графичките уреди можат да поврзат две точки права линиски, потоа кривите дадени со на пр. сложени кубни полиноми се апроксимираат со полигонски влакна. За изведување на апроксимацијата со полигонски [illegible] од [illegible] при-вите се дадени со кубни полиноми




– Интервалот $[T_i, T_{i+1}]$ на еден сложен кубен полином $P_{[i,i+1]}$ е скициран. Max грешка на апроксимацијата $dS_{max}$ зависи од големината на интервалот $[a,b]$, а исто така и од кривината $S''$ во интервалот $[a,b]$.

Грешката на апроксимацијата изнесува:

$$dS = (T-a)(T-b)\frac{S''(\tau)}{2} \; ; \quad T, \tau \in [a,b]$$

$$dS_{max} \le \frac{\Delta T^2}{8} S''_{max}$$ , бидејќи max вредност на $(T-a)(T-b) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{\Delta T^2}{4}$

Кај кубните полиноми кривината $S''$ линеарно се намалува, односно зголемува во интервалот $[T_i, T_{i+1}]$, така што најголема вредност $S''_{max}$ се добива на почетокот или на крајот од интервалот.

Кај графичкото претставување за $dS_{max}$ се зема вредност од 0.2мм. Кривините $S''$ во јазолните точки се познати од определувањето на кубните полиноми. Инкрементот $\Delta T \le \sqrt{\frac{8\, dS_{max}}{|S''_{max}|}}$ се намалува, така што ќе се добива цел број т.е. $\frac{(T_{i+1} - T_i)}{\Delta T}$